УДК 550.34

ГЕОФИЗИКА

В.М. ПАВЛОВ, А.А. ГУСЕВ

# К ВОЗМОЖНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОЧАГЕ ГЛУБОКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ ПО ПОЛЮ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

*(Представлено академиком М.А. Садовским 1 VII 1980)*

Рассмотрим следующую идеализированную постановку задачи о восстановлении движения в очаге землетрясения по полю объемных волн. Очаг землетрясения, описываемый кинематически как разрыв сплошности вдоль некоторой гладкой поверхности $\Sigma$ с нормалью $n_i$ и относительным смещением берегов (подвижкой) $B_i(\mathrm{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$, расположен в безграничной линейно упругой изотропной однородной среде. Начало декартовой системы $x_i$, $i = 1, 2, 3$, полагаем лежащим на $\Sigma$, начало отсчета по времени $t$ — совпадающим с началом движений в очаге. Процесс движения в очаге конечен по времени и охватывает ограниченную пространственную область с характерным размером $D$, поэтому вектор-функция $\dot{B}_i \equiv \dfrac{\partial B_i}{\partial t}$ предполагается финитной по $x_i$ и $t$.

Далее в рамках этой модели очага предполагается выполнение следующих условий: 1) $\Sigma$ — плоскость с нормалью $n_i = (0, 0, 1)$, 2) $B_i(\mathbf{x}, t) = B(\mathbf{x}, t) b_i$; $b_i = \mathrm{const}$, т.е. подвижка имеет неизменное направление на разрыве; 3) $b_i n_i = b_3 = 0$ — движение в источнике имеет сдвиговой характер (принято стандартное соглашение о суммировании): 4) $\dot{B}(\mathbf{x}, t) \geqslant 0$ — подвижка монотонна по $t$. Предположения 1)–3) достаточно традиционны ([1], [2]). В пользу же предположения 4) говорит общая успешность подгонки временной функции источника сглаженной ступенькой для больших и малых, поверхностных и глубоких землетрясений. Полевые наблюдения также подтверждают такое предположение.

Смещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, вызываемые таким источником в объемных волнах на луче с ортом $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r}| = 1$) на расстоянии $R \gg D$ (в дальней зоне), связаны с подвижкой в источнике уравнениями (см. например, ([1]))

$$(1)\quad \begin{aligned} &Q_P \int_\Sigma \dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t+\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)\,dS = \mathbf{u}\cdot\mathbf{r} \equiv U_P, \\ &Q_{Si} \int_\Sigma \dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t+\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_S)\,dS = (\mathbf{u}\times\mathbf{r})_i \equiv U_{Si}, \end{aligned}$$

$$M_0 = \mu \int_0^\infty \int_\Sigma \dot{B}(\mathbf{x}, t)\,dS\,dt,$$

$$\dot{B}_{\text{н}}(x, t) = \mu \dot{B}(\mathbf{x}, t)/M_0,$$

где $\dot{B}_{\text{н}}$ – нормированная подвижка; $M_0$ – сейсмический момент; $Q_P = M_0 q_P$, $Q_{Si} = M_0 q_{Si}$, где $q_P = m_{ij}r_ir_j/(4\pi\rho c_P^3 R)$ и $q_{Si} = \epsilon_{ikl}m_{kj}r_jr_l/(4\pi\rho c_S^3 R)$ – диаграммы направленности $P$- и $S$-волн (здесь $m_{ij} = n_ib_j + n_jb_i$, а $\epsilon_{ijk}$ – антисимметричный единичный тензор 3-го ранга); $c_P, c_S$ – скорости $P$- и $S$-волн, $\rho, \mu$ – плотность и модуль сдвига среды в области очага.

Мы предполагаем, что значение сейсмического момента источника определено заранее, и рассматриваем задачу восстановления нормированной функции скорости подвижки $\dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$ на основе уравнений (1).

Приведенные формулы можно записать в частотной области, применяя к (1) преобразование Фурье. В результате несложных преобразований имеем (ограничимся случаем $P$-волн):

$$(2)\quad \tilde{\dot{B}}_{\text{н}}(k_1, k_2, \omega)\Big|_{k_i = r_i\omega/c_P} = \hat{U}_P(r_1, r_2, \omega)/Q_P,$$

где $\tilde{\dot{B}}_{\text{н}}$ – преобразование Фурье функции $\dot{B}_{\text{н}}$ по переменным $x_1, x_2, t$, а $\hat{U}_P$ – преобразование Фурье функции $U_P$ по $t$. Так как $r_1, r_2$ – компоненты единичного вектора $\mathbf{r}$, то $r_1^2 + r_2^2 \leqslant 1$ и из (2) следует, что спектральная плотность $\tilde{\dot{B}}(k_1, k_2, \omega)$ может быть в принципе определена из наблюдений в дальней зоне лишь для $k_1$, $k_2$, $\omega$ из конуса $k_1^2 + k_2^2 \leqslant \omega^2/c_P^2$.

При сходных предположениях, но без условия положительности, задача восстановления движения в очаге землетрясения по полю объемных волн в дальней зоне рассматривалась Б.В. Костровым ([1]), который установил, что эта задача аналогична задаче синтеза антенны. Поскольку эмпирические данные известны лишь в конусе, то детальное определение функции $\dot{B}_{\text{н}}$ возможно лишь в том случае, когда ее спектр (2) можно продолжить аналитически на все пространство переменных $k_1$, $k_2$, $\omega$. Задача аналитического продолжения функции с ограниченного множества на все пространство не является устойчивой, а поэтому, как отмечено в ([1]), восстановление движения в очаге в деталях на основании только уравнений (1) невозможно – необходимо привлечь априорную информацию о процессах в очаге, которая позволила бы существенно сузить множество функций, в котором ищется решение задачи. Без априорных предположений, на основании лишь (1), как отмечено в ([1]), невозможно даже определить геометрические размеры очага.

Хотя задача устойчивого определения $\dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$ в деталях неразрешима, это не исключает возможности устойчивого определения крупномасштабных особенностей движения в очаге, которые описываются значениями $\tilde{\dot{B}}(k_1, k_2, \omega)$ при низких пространственно-временных частотах. Задача продолжения спектра в данном случае не является безнадежной, так как требуется выполнить продолжение не на все пространство, а только на ограниченное множество – область низких частот. С другой стороны, если известна низкочастотная часть спектра, а также геометрические размеры и длительность источника, то можно определить функцию, которая отражает крупномасштабные детали движения в источнике. Действительно, пусть спектр $\tilde{\dot{B}}_{н}$ известен в области, определенной условиями

$$(3) \qquad k_1^2 \leqslant \Omega_1^2, \qquad k_2^2 \leqslant \Omega_2^2, \qquad \omega^2 \leqslant \Omega_3^2,$$

продолжим его нулем вне области и вычислим обратное преобразование Фурье. В результате имеем

$$(4) \qquad \dot{B}_*(\mathbf{x}, t) = C\iiint \operatorname{sinc}\left(\frac{(y_1 - x_1)n}{L}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{(y_2 - x_2)m}{W}\right)\times$$
$$\times \operatorname{sinc}\left(\frac{(s-t)l}{T}\right)\dot{B}_{н}(\mathbf{y}, s)dy_1\,dy_2\,ds,$$

где $L, W$ – геометрические размеры очага, $T$ – длительность процесса движения в источнике; $n = L\Omega_1$, $m = W\Omega_2$, $l = T\Omega_3$, $\operatorname{sinc}(z) \equiv \sin z/z$, а $C$ – постоянная нормировки. Числа $n, m, l$ определяют относительную ширину ядра сглаживания и могут быть названы "числами элементов разрешения" по соответствующим координатам. При увеличении области (3), т.е. увеличении чисел $n, m, l$, ширина ядра в соответствующих направлениях уменьшается и все более мелкие детали функции $\dot{B}_{н}$ оказываются представленными в $\dot{B}_*$.

Итак, отказавшись от детального определения функции $\dot{B}_{н}$ как безнадежной задачи, мы предлагаем изменить постановку обратной задачи и по объемным волнам в дальней зоне определять функцию $\dot{B}_*(\mathbf{x}, t)$. Несколько обобщая описанный подход, будем рассматривать задачу восстановления движения в очаге как задачу определения результата низкочастотной фильтрации функции $\dot{B}_{н}$:

$$(5) \qquad \dot{B}_*(\mathbf{x}, t) = \frac{nml}{LWT}\iiint h\left(\frac{(y_1 - x_1)n}{L}, \frac{(y_2 - x_2)m}{W}, \frac{(s-t)l}{T}\right)\dot{B}_{н}(\mathbf{y}, s)\,dy_1\,dy_2\,ds.$$

Ядро $h(\mathbf{x}, t)$ является нормированным и имеет ограниченный спектр, причем $\tilde{h}(k_1, k_2, \omega) = 0$ вне области $k_1^2 \leqslant 1$, $k_2^2 \leqslant 1$, $\omega^2 \leqslant 1$. При этом наблюдательные данные предполагаются известными на конечном числе лучей с ортами $\mathbf{r}_i (i = 1, \ldots$ $\ldots, N_1)$. Мы будем предполагать, что наблюдательные данные являются идеально точными. Вопросы влияния точности реальных данных будут рассмотрены отдельно.

Далее развивается подход к решению сформулированной выше задачи, существенно использующей степенные моменты функции скорости подвижки $\dot{B}_{н}$, которые определяются как интегралы вида

$$(6) \qquad M_{\alpha\beta\gamma} = \int_0^\infty \int_\Sigma \dot{B}_{н}(\mathbf{x}, t) x_1^\alpha x_2^\beta t^\gamma dS\,dt, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots$$

Сумма $K = \alpha + \beta + \gamma$ называется порядком степенного момента. Моменты (6) являются коэффициентами ряда Тейлора функции $\tilde{\dot{B}}_{н}(k_1, k_2, \omega)$ и поэтому их нахождение равносильно продолжению спектра $\tilde{\dot{B}}_{н}$ из конуса $k_1^2 + k_2^2 \leqslant \omega^2/c_P^2$ в область типа (3). С другой стороны, они непосредственно связаны с $\dot{B}_*(\mathbf{x}, t)$. Действительно, разложив ядро в (5) в ряд Тейлора в точке $\left(-\frac{x_1 n}{L}, -\frac{x_2 m}{W}, -\frac{tl}{T}\right)$, получим для $\dot{B}_*$ представление

$$(7) \qquad \dot{B}_*(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0} \frac{M_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\beta!\gamma!} \cdot \Phi_{\alpha\beta\gamma}\left(-\frac{x_1 n}{L}, -\frac{x_2 m}{W}, -\frac{tl}{T}\right),$$

где

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, t) = \frac{n^{\alpha+1} m^{\beta+1} l^{\gamma+1}}{L^{\alpha+1} W^{\beta+1} T^{\gamma+1}} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial t^\gamma} h(x_1, x_2, t).$$

Ряд (7) абсолютно и равномерно сходится, так как он мажорируется числовым экспоненциальным рядом ($n, m, l$ фиксированы)

$$(8)\qquad \frac{8H}{LWT} \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geqslant 1} \frac{n^\alpha m^\beta l^\gamma}{\alpha!\beta!\gamma!},$$

где $H = \max\left|\widetilde{h}(k_1, k_2, \omega)\right|$.

Из сходимости ряда (7) следует, что функция $\dot{B}_*(\mathbf{x}, t)$ может быть представлена его конечным отрезком подходящей длины, при этом отброшенная бесконечная часть ряда не превосходит соответствующей "хвостовой" части ряда (8). Отсюда следует, что для того, чтобы определить с некоторой точностью $\dot{B}_*(\mathbf{x}, t)$, достаточно знать некоторое конечное число степенных моментов, а также размеры и длительность процесса источника. Если, например, известны все моменты источника порядков от 1 до $N$, то числа элементов разрешения $n, m, l$ и точность $\epsilon$ приближения функции $\dot{B}_*(\mathbf{x}, t)$ связаны соотношением

$$(9)\qquad \frac{8H}{LWT} \sum_{p=N+1}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=p} \frac{n^\alpha m^\beta l^\gamma}{\alpha!\beta!\gamma!} \leqslant \epsilon.$$

При этом общее число использованных моментов равно $(N+1)(N+2)(N+3)/6$.

Идея использовать моменты для описания источника упругих волн впервые была высказана Ф.М. Гольцманом ([3]) в связи с описанием (мнимого) источника отраженных волн в сейсморазведке. В теории очага землетрясения моменты использовались Бейкусом и Малкаи ([4], [5]) как один из возможных способов описания сейсмического источника общего вида. Однако, как видно из (7), моменты источника могут быть использованы не только для описания источника, но и для решения сформулированной обратной задачи, для чего моменты следует определить из наблюдений.

Рассмотрим детально случай, когда известны смещения в $P$-волнах в дальней зоне. (Реально это случай глубокого землетрясения). Приведем соотношение, которое является базисным для получения системы уравнений, содержащей моменты. Для этого умножим первое уравнение (1) на $t^K$ и проинтегрируем в пределах от 0 до $\infty$ (в действительности интегрирование будет в конечных пределах в силу финитности $\dot{B}_\text{н}$). Заменяя переменную $t$ на $s = t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P$, имеем

$$(10)\qquad Q_P \int_\Sigma \int_0^\infty (s - \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)^K \dot{B}_\text{н}(\mathbf{x}, s)\, ds\, dS = \int_0^\infty U_P(\mathbf{r}, t)\, t^K dt, \qquad K = 0, 1, 2, \ldots$$

Разделив левую и правую часть (10) на соответствующие части равенства

$$Q_P = \int_0^\infty U_P(\mathbf{r}, t)\, dt,$$

которое получается из (10) при $K = 0$, находим

$$(11)\qquad \sum_{\alpha+\beta+\gamma=K} a_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) M_{\alpha\beta\gamma} = E_K(\mathbf{r}), \qquad K = 1, 2, \ldots,$$

где коэффициенты $a_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \dfrac{K!}{\alpha!\beta!\gamma!} c_P^{\gamma-K} (-r_1)^\alpha \cdot (-r_2)^\beta$, а правые части $E_K(\mathbf{r}) = F_K(\mathbf{r})/F_0(\mathbf{r})$, где

$$F_K(\mathbf{r}) = \int_0^\infty U_P(\mathbf{r}, t)\, t^K dt, \qquad K = 0, 1, 2, \ldots$$

При фиксированном $K = 1, 2, \ldots$ это соотношение связывает только моменты порядка $K$. Число различных моментов порядка $K$ $N_K = (K+1)(K+2)/2$. Для того чтобы определить неизвестные моменты, необходимо для каждого луча $\mathbf{r}_i$, на котором известны смещения в $P$-волнах, определить $E_K(\mathbf{r})$ и выписать соотношение (11). Совокупность таких уравнений в количестве $N_1 \geqslant N_K$ образует избыточную систему алгебраических уравнений, разрешимую в смысле м.н.к., если векторы $\mathbf{r}_i$ находятся в общем положении. Нельзя, однако, дать гарантии, что число обусловленности матрицы системы будет невелико при больших $N_K$, даже если векторы "хорошо" распределены по сфере. Аналогичным образом можно использовать данные об $S$-волнах.

Для применения формулы (7) кроме моментов необходимо также знать размеры и длительность работы источника. Проблема определения этих величин в рамках сформулированных предположений была решена нами ранее ([6]), причем был существенно использован постулат положительности $\dot{B}_{\text{н}}$.

Таким образом, если известны функции $U_P$ и (или) $U_S$ на некотором числе лучей, можно выбрать максимальный порядок моментов $N$ и числа разрешения $n$, $m$, $l$ так, чтобы определить функцию $\dot{B}_*(\mathbf{x}, t)$ с некоторой точностью $\epsilon$, удовлетворяющей оценке (9). Этот принципиальный результат является основным выводом данной работы.

Обсудим некоторые возможности обобщения описанного подхода. Степенные моменты источника в Земле можно получить также из наблюдений поверхностных волн и собственных колебаний Земли ([4], [5]). Разложение (7) можно обобщить, считая, что решение ищется в виде ряда по некоторому подходящему семейству функций от безразмерных аргументов. Нахождение коэффициентов этого ряда по наблюдениям также сводится к решению системы линейных уравнений.

Заметим, наконец, что аналогичная техника может быть легко развита и для восстановления пространственно-временной структуры некогерентного высокочастотного излучателя, которым является очаг землетрясения для частот существенно более высоких, чем корнер-частота ([7]). В силу некогерентности вклады от разных точек разрыва аддитивны, поэтому соотношение типа (1) будет связывать пространственно-временное распределение интенсивности излучения источника для некоторой полосы частот со средней мощностью излучения тех же частот, зарегистрированной на некотором луче, как функцией времени. Постулат положительности функции источника теперь выполняется автоматически, и описанный подход полностью переносится на данный случай.

Институт вулканологии Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР, Петропавловск-Камчатский

Поступило
8 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б.В. Костров*, Механика очага тектонического землетрясения, М., "Наука", 1975. [2] *K. Aki*, Tectonophysics, v. 13, № 1–4, 423 (1972). [3] *Ф.М. Гольцман*, Статистические модели интерпретации, М., "Наука", 1971. [4] *G. Backus, M. Mulcahy*, Geophys.J., v. 46, 341 (1976). [5] *G. Backus, M. Mulcahy*, ibid., v. 47, 301 (1976). [6] *А.А. Гусев, В.М. Павлов*, ДАН, т. 239, № 2, 289 (1978). [7] *А.А. Гусев*, ДАН, т. 244, № 3 (1979).